2016

Échantillonnage et Estimation

Examen corrigé 2015-2016 l EG5

Cours Assuré par M. BOUAYAD

Corrigé proposé par : Issam
M@Facdéco
23/02/2016

Université Moulay Ismail-Faculté de Droit-Meknès

Filière : Sciences économiques et Gestion	Année Universitaire : 2015-2016
Contrôle : Final	
Semestre : 3	
Elément de module : Statistique III	Durée : 1 H 30 min

I-Déterminer la fonction génératrice des moments de la loi Bernoulli; en déduire l'espérance mathématique et la variance.

II-La faculté de sciences juridiques économiques et sociales de Meknès lancera l'année prochaine une nouvelle filière de la licence professionnelle « GRH ». Elle effectue un sondage pour estimer la proportion des étudiants du troisième semestre qui ont l'intention de s'inscrire dans cette nouvelle filière.

Sur un échantillon de 200 étudiants, elle observe une fréquence de 0,25

a- Quel est l'estimateur ponctuel du Maximum de vraisemblance de la proportion p des étudiants qui ont l'intention de s'inscrire dans cette nouvelle filière.

b- Construire un intervalle de confiance pour p au niveau de 0.99

III- La force de compression d'un type de béton est modélisée par une variable gaussienne d'espérance μ et de variance σ^2. L'unité de mesure est le *psi* (pound per square inch). On supposera la variance σ^2 connue et égale à 1000. Sur un échantillon de 12 mesures, on a observé une moyenne empirique de 3250 psi.

a- Donner un intervalle de confiance de niveau 0.95 pour μ.

b- On souhaite maintenant estimer μ avec une marge d'erreur de 15 psi, avec un niveau de confiance de 0.95. Quelle taille minimum doit avoir l'échantillon ?

La variance de la population est désormais supposée maintenant **inconnue**. On dispose de la donnée suivante (sur le même échantillon de taille 12) :

$$\sum_{i=1}^{12} x_i^2 = 126761700$$

c- Donnez pour μ un intervalle de confiance de niveau 0.95 et comparez-le avec celui de la question (a). Donner un intervalle de confiance de niveau 0.95 pour la variance, et pour l'écart-type.

IV- Une pièce fabriquée par une entreprise a une durée de vie de 3000 heures et un écart-type de 150 heures. A la suite d'une modification dans la fabrication de cette pièce. Le fabricant affirme que la nouvelle pièce a une durée de vie supérieure à l'ancienne.

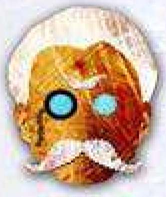
On a testé un échantillon de 50 pièces, on a trouvé une durée moyenne de 3250 heures avec un écart-type de 150 heures.

La nouvelle pièce apporte-t-elle une amélioration dans la durée de vie de la pièce au risque de 5 % ?

Barème : I- 4 points ; II- 4 points ; III- 8 points ; IV- 4 points

NB: La calculatrice est autorisée.

Ci-joint les tables de la loi Normale N(0,1), de la loi de Student et de la loi Khi-deux.



Contrôle Final

2015 - 2016

1

www.koulyati.com

Exo 1 :

* Fonction génératrice des moments de la loi Bernoulli

* on a :

$$X \leadsto B(0,1)$$

$$p(X=1)=p \quad \text{et} \quad p(X=0)=q \text{ ou } (1-p)$$

donc : $M_x(t) = E(e^{tx}) = \sum_{i=1}^{n} e^{tx_i} p_i$

$$M_x(t) = e^{t\times 0} \times p(X=0) + e^{t\times 1} \times p(X=1)$$

$$M_x(t) = 1\times q + e^t \times p$$

$$\boxed{M_x(t) = e^t p + q}$$

* En déduire l'espérance et la variance :

on a : $E(X) = M'_x(0)$

Alors :

$$M'_x(t) = (e^t \times p + q)' = e^t \times p$$

$$M'_x(0) = e^0 \times p = p$$

donc : $\boxed{M'_x(0) = E(X) = p}$

on a : $V(X) = E(x^2) - E(X)^2$

2

avec : $E(x^2) = M''_X(0)$

Alors :

$$M''_X(t) = (e^t \times p)' \quad \text{car} \quad M'_X(t) = e^t \times p$$

$$M''_X(t) = e^t \times p$$

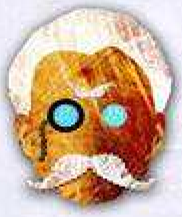
$$M''_X(0) = e^0 \times p = p$$

donc :

$$V(X) = p - (p)^2$$

$$V(X) = p(1 - p)$$

$$\boxed{V(X) = p \cdot q}$$



Exo 2 :

a) L'estimation ponctuel du Maximum de Vraisemblance de la proportion p :

on a : $X \leadsto \mathcal{B}(0,1)$ (0 = échec NV / 1 = succès ✓)

$$p(X = x_i) = p^{x} (1-p)^{1-x_i}$$

Alors :

$$L(x_1 \cdots\cdots x_n ; p) = p(x_1, p) \cdots\cdots p(x_n, p)$$

$$L(x_1 \cdots x_n . p) = \prod_{i=1}^{n} p^{x} (1-p)^{1-x_i}$$

$$= (p^{x_1} \cdot p^{x_2} \cdot p^{x_3} \cdots p^{x_n}) \left((1-p)^{1-x_1} \cdots (1-p)^{1-x_n}\right)$$

3

$$= p^{\sum x_i} \cdot (1-p)^{\sum(1-x_i)} = p^{\sum x_i} \cdot (1-p)^{n-\sum x_i}$$

$$\log L(x_1 \dots x_n, p) = \log\left(p^{\sum x_i} \cdot (1-p)^{n-\sum x_i}\right)$$

$$= \log\left(p^{\sum x_i}\right) + \log\left((1-p)^{n-\sum x_i}\right)$$

$$= \sum x_i \log(p) + (n - \sum x_i) \log(1-p)$$

$$\frac{\partial \log L(x_1 \dots x_n, p)}{\partial p} = \sum x_i \times \frac{1}{p} + (n - \sum x_i) \times \frac{-1}{1-p}$$

avec : $(\log(p))' = \frac{(p)'}{p} = \frac{1}{p}$

Alors : $\frac{\partial \log L(x_1 \dots x_n, p)}{\partial p} = \frac{\sum x_i}{p} - \frac{n - \sum x_i}{1-p} = 0$

$$\frac{\sum x_i}{p} = \frac{n - \sum x_i}{1-p} \iff \frac{1-p}{p} = \frac{n - \sum x_i}{\sum x_i}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p} - \frac{p}{p} = \frac{n}{\sum x_i} - \frac{\sum x_i}{\sum x_i} \iff \frac{1}{p} - 1 = \frac{n}{\sum x_i} - 1$$

donc :

$$\boxed{p = \frac{\sum x_i}{n} \Rightarrow \hat{p} = \bar{X}}$$

b) on a : $f = 0,25$, $\alpha = 0,99$; $n = 200$

4

Alors :

$$IC = \left[f - t_\alpha \times \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \; ; \; f + t_\alpha \times \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \right]$$

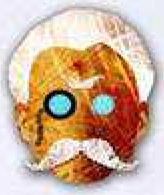
on a : $2\Pi(t_\alpha) - 1 = 0,99$

$$\Pi(t_\alpha) = \frac{1,99}{2} = 0,995$$

donc $t_\alpha = 2,57$ (table Normale)

$$IC = \left[0,25 - 2,57 \times \sqrt{\frac{0,25(1-0,25)}{200}} \; ; \; 0,25 + 2,57 \times \sqrt{\frac{0,25(1-0,25)}{200}} \right]$$

$$\boxed{IC = [\, 0,1713 \; ; \; 0,3287 \,]}$$



Exo 3 :

a) on a : $\sigma^2 = 1000$; $n = 12$; $\bar{X} = 3250$

$$IC = \left[\bar{X} - t_\alpha \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \; ; \; \bar{X} + t_\alpha \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

on cherche maintenant à t_α

on a : $2\Pi(t_\alpha) - 1 = 0,95$

$$\Pi(t_\alpha) = \frac{1,95}{2} = 0,975$$

donc : $t_\alpha = 1,96$ (table Normale)

Alors :

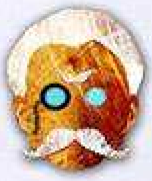
$$IC = \left[3250 - 1,96 \times \frac{\sqrt{1000}}{\sqrt{12}} \; ; \; 3250 + 1,96 \times \frac{\sqrt{1000}}{\sqrt{12}} \right]$$

$$\boxed{IC = [\, 3232 \; ; \; 3268 \,]}$$

5

b) pour un échantillon de taille n la précision de l'intervalle de confiance de niveau 0,95 est :

$$\pm\ 1{,}96 \times \frac{\sqrt{1000}}{\sqrt{n}}$$



Alors :

$$1{,}96 \times \frac{\sqrt{1000}}{\sqrt{n}} = 15$$

$$\sqrt{n} = 1{,}96 \times \frac{\sqrt{1000}}{15} \iff n = (1{,}96)^2 \times \frac{1000}{(15)^2}$$

$\boxed{n = 17{,}7}$. l'échantillon doit donc être de taille 18 au moins.

c) on a : $n = 12$; $\bar{X} = 3250$; σ inconnu

$$IC = \left[\bar{X} - t_\alpha \times \frac{S}{\sqrt{n}}\ ;\ \bar{X} + t_\alpha \times \frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

on cherche maint a l'estimation ponctuel de σ

on a : $$S^2 = \frac{\Sigma(X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\Sigma X_i^2 - n\bar{X}^2}{n-1} = \frac{126761700 - 12\times(3250)^2}{11}$$

$$\boxed{S^2 = 1063{,}64\ ;\ S = 32{,}61}$$

puisque σ_p inconnu et $n = 12 < 30$

donc : $\bar{X} \leadsto$ Student $(n-1)$ d.d.l

$$2\pi(t_\alpha) - 1 = 0{,}95 \iff \pi(t_\alpha) = 0{,}975$$

$\boxed{t_\alpha = 2{,}201}$ (table de student)

$$IC = \left[3250 - 2{,}201 \times \frac{32{,}61}{\sqrt{12}}\ ;\ 3250 + 2{,}201 \times \frac{32{,}61}{\sqrt{12}}\right]$$

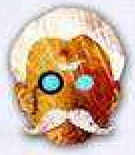
$$\boxed{IC = [3229{,}3\ ;\ 3271]}$$

6

* **comparez :** A niveau de confiance égale, et bien que la variance estimé soit inférieur à la variance théorique, l'intervalle de confiance calculé avec la loi de student (variance supossée inconnue) est plus large, donc moins précis, que celui calculé avec la loi Normale (variance connu). cela tient au fait que les lois de student sont plus disperseés que la loi Normale.

* **l'intervalle de confiance pour la variance :**

conc : $n = 12$; $S^2 = 1063.64$; $\alpha = 0,05$



$$IC = \left[\frac{(n-1)\,S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}} \; ; \; \frac{(n-1)\,S^2}{\chi^2_{\alpha/2}} \right]$$

le quantile d'un 0,025 pour la loi de KHi-deux

$$\chi^2_{11}\ t_{\frac{\alpha}{2}} = 3,816 \; ; \; t_{1-\frac{\alpha}{2}} = 21,92$$

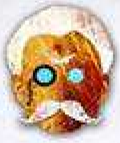
donc : $IC = \left[\frac{11 \times 1063,64}{21,92} \; ; \; \frac{11 \times 1063 \times 64}{3,816} \right]$

$$\boxed{IC = [533 \; ; \; 3067]}$$

En prenant la variance carée des deux bornes, on obtient un intervalle de confiance pour l'ecart type

$$\boxed{IC = [23,08 \; ; \; 55,4]}$$

Les IC pour la variance ou l'ecart type pour de petits échantillon sont en général trés imprecis.

Exo 4 : 

7

on a : $m = 3000$; $n = 50$; $\sigma = 150$; $\alpha = 0{,}05$

$\bar{X} = 3250$; $H_0 : m = m_0$; H_1 :

* La variable de décession $T = \dfrac{\bar{X} - m_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$ suit une loi Normale

puisque : $H_1 : m > m_0$ alors il s'agit d'un test unilatéral à gauche avec :

$$I_{acc} = \left]-\infty \,;\, m_0 + t_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

$t_{1-\alpha} = 1{,}96$ (table Normale)

donc : $I_{acc} = \left]-\infty \,;\, 3000 + 1{,}96 \times \dfrac{150}{\sqrt{50}}\right]$

$$\boxed{I_{acc} = \left]-\infty \,;\, 3041{,}58\right]}$$

puisque : $\bar{X} \notin \left]-\infty \,;\, 3041{,}58\right]$ donc on refuse H_0 (amélioration ....) et on accepte H_1

WWW.KOULYATI.COM

Bon courage

ISSAM